УДК 51

Черняк М. М.

Учитель математики

МБОУ «ЦО № 15 «Луч»

г. Белгорода

РЕШЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ В ЗАДАЧАХ ЕГЭ

Аннотация: в статье ведется речь о рациональных неравенствах и равносильных им неравенствах. В тексте статьи представлены задачи, встречаемые в едином государственном экзамене по профильной математике, и их решение.

Ключевые слова: неравенства, рациональные неравенства, равносильные неравенства, метод интервалов, профильная математика.

Chernyak M. M.

Mathematic teacher

MBOU "Center of Education № 15" Luch "

Belgorod

SOLUTION OF RATIONAL INEQUALITIES IN THE USE TASKS

Abstract: The article deals with rational inequalities and inequalities equivalent to them. The text of the article presents the problems encountered in the unified state exam in profile mathematics and their solution.

Key words: inequalities, rational inequalities, equivalent inequalities, interval method, profile mathematics.

Неравенство – это два числа или математических выражения, соединенных одним из знаков: $>$ (больше), $<$ (меньше), $\geq$ (больше или равно), $\leq$ (меньше или равно).Неравенства, содержащие знак $>$ или $<$, называют строгими, а содержащие знак $\geq$ или $\leq$, - нестрогими [1].

Решением неравенства с одной переменной называется значение переменной, которое обращает его в верное числовое неравенство. Неравенства, имеющие одни и те же решения, называются равносильными.

Неравенство, левая и правая части которого есть рациональные выражения относительно x, называют рациональным неравенством x.

Например, являются рациональными неравенства

$$(x-1)(x+3)>0, \qquad \frac{x-1}{x+3}<0, \qquad \frac{x^2-5x+5}{x+1}>\frac{1}{x+5}+2.$$

При решении рациональных неравенств приходится умножать или делить обе части неравенства на неравное нулю число, переносить члены неравенства из одной части в другую, применять правила сложения и вычитания алгебраических дробей. В результате получается неравенство, равносильно предыдущему, т.е. неравенство, имеющее те же решения [2].

Рассмотрим рациональное неравенство

$$\frac{A(x)}{B(x)}>0,$$

(1)

где $A(x)$ и $B(x)$ – многочлены относительно x.

Любое решение неравенства (1) есть решение неравенства

$$A(x)\cdot B(x)>0, \qquad (2)$$

Если x_0 – решение неравенства (1), то справедливо числовое неравенство $\frac{A(x_0)}{B(x_0)}>0$, означающее, что числа $A(x_0)$ и $B(x_0)$ имеют одинаковый знак, то есть справедливом числовое неравенство $A(x_0)\cdot B(x_0)>0$. Из этого следует, что число x_0 – решение неравенства (2).

Если многочлены $A(x)$ и $B(x)$ разлагаются в произведение разных двучленов вида $x-x_0$, то все решения неравенства (1) можно получить, решив методом интервалом неравенство (2). Учитывая это обстоятельство, часто не переходят от неравенства (1) к неравенству (2), а говорят о применении метода интервалов к неравенству (1).

Пример 1:

Решите неравенство $\frac{x^2-6x+8}{x-1} - \frac{x-4}{x^2-3x+2} \leq 0$ [3].

Решение:

1) Необходимо разложить квадратные трехчлены, входящие в неравенство, на линейные множители:

$$x^2 - 6x + 8 = (x-4)(x-2)$$

$$x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$$

Неравенство принимает вид:

$$\frac{(x-4)(x-2)}{x-1} - \frac{x-4}{(x-2)(x-1)} \leq 0.$$

2) После приведения дробей к общему знаменателю, вычитания дробей и вынесения общего множителя неравенство преобразовывается к следующему виду:

$$\frac{(x-4)(x-2)^2-(x-4)}{(x-2)(x-1)} \leq 0,$$

$$\frac{(x-4)((x-2)^2-1)}{(x-2)(x-1)} \leq 0,$$

$$\frac{(x-4)(x-1)(x-3)}{(x-2)(x-1)} \leq 0.$$

3) В последнем выражении можно сократить дробь на многочлен $x-1$, при условии, что $x \neq 1$.

$$\frac{(x-4)(x-3)}{(x-2)} \leq 0.$$

4) Решая с помощью метода интервалом, приходим к ответу:

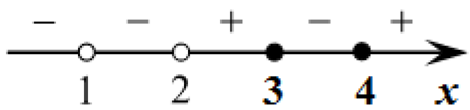

Рис. 1. Решение примера 1.

Множество решений исходного неравенства: $(-\infty; 1) \cup (1; 2) \cup [3; 4]$.

Ответ: $(-\infty; 1) \cup (1; 2) \cup [3; 4]$.

Пример 2:

Решите неравенство $x^3 + 2x^2 - \frac{24x^2 - x + 3}{x-3} \leq 1$ [3].

Решение:

1) Необходимо перенести члены неравенства из одной части в другую, применить правила сложения и вычитания алгебраических дробей:

$$\frac{x^4 + 2x^3 - 3x^3 - 6x^2 - 24x^2 + x - 3 - x + 3}{x-3} \leq 0,$$

$$\frac{x^4 - x^3 - 30x^2}{x-3} \leq 0.$$

2) При вынесении общего множителя и последующем разложение числителя на множители получаем неравенство:

$$\frac{x^2(x+5)(x-6)}{x-3} \leq 0.$$

3) Решая с помощью метода интервалов, приходим к ответу:

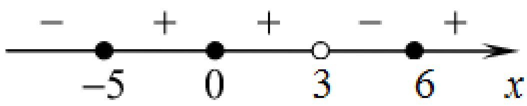

Рис. 2. Решение примера 2.

Множество решений исходного неравенства: $(-\infty; -5] \cup \{0\} \cup (3; 6]$.

Ответ: $(-\infty; -5] \cup \{0\} \cup (3; 6]$.

Пример 3:

Решите неравенство $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2-x} \leq 5$ [3].

Решение:

1) Необходимо перенести члены неравенства из одной части в другую, применить правила сложения и вычитания алгебраических дробей:

$$\frac{5x^2 - 15x + 11}{(x-1)(2-x)} \leq 0.$$

2) При разложении числителя на линейные множители получаем следующее неравенство:

$$\frac{5\left(x-\frac{15-\sqrt{5}}{10}\right)\left(x-\frac{15+\sqrt{5}}{10}\right)}{(x-1)(2-x)} \leq 0.$$

3) Применяем метод интервалов для неравенства:

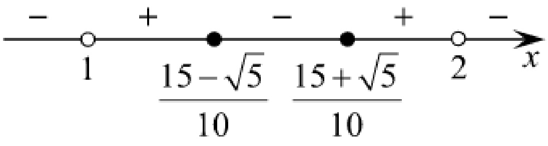

Рис. 3. Решение примера 3.

Таким образом, решить рациональные неравенстве, встречаемые в контрольно-измерительных материалах ЕГЭ по профильному уровню математики, можно с помощью тождественных преобразований, переходу к равносильному неравенству и дальнейшему применению метода интервалов.

Использованные источники:

1. Маркушевич, Л. А. Уравнения и неравенства в заключительном повторении курса алгебры в средней школе / Л. А. Маркушевич, Р. С. Черкасов. – М.: Просвещение, 2004. – 167 с.

2. Никольский, С. М. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учеб. общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни / [С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин]. – М.: Просвещение, 2019. – 464 с.

3. Решу ЕГЭ [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://ege.sdamgia.ru/test?theme=242(дата обращения: 16.05.2021).