

**Турдиев Улугбек Каюмович – Fizika – matematika fanlar bo'yicha
falsafa doktori (PhD).**

Axborot texnologiyalari va menejment universiteti

“Matematika” kafedrasida dotsent

Raxmatova Latofat Islamovna – magistrant.

Axborot texnologiyalari va menejment universiteti

**IKKI TEZLIKLI GIDRODINAMIKADA YUZAGA KELADIGAN
BURGERS TIPIDAGI TENGLAMALARNING BIR O'LCHOVLI
SISTEMASI UCHUN KOSHI MASALASI.**

Annotatsiya: Ikki tezlikli gidrodinamikada paydo bo'lgan Byurgers tipidagi bir o'lchovli tenglamalar tizimi uchun Koshi masalasi ko'rib chiqildi. Bir o'lchovli Burgers tipidagi tizim uchun Koshi masalasini echimining mavjudligi va o'ziga xosligi zaif approksimatsiya usuli bilan isbotlangan.

Kalit so'zlar: Ikki tezlikli gidrodinamika, Byurgers tipidagi tizim, zaif approksimatsiya usuli.

Турдиев Улугбек Каюмович Доцент кафедры математики
Университета информационных технологий и менеджмента
Рахматова Латофат Исламовна — студентка магистратуры.

Университет информационных технологий и управления

**ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ
ТИПА БЮРГЕРСА, ВОЗНИКАЮЩЕЙ В ДВУХСКОРОСТНОЙ
ГИДРОДИНАМИКЕ**

Аннотация: Рассмотрена задача Коши для одномерной системы уравнений типа Бюргерса возникающая в двухскоростной гидродинамике. Методом слабой аппроксимации доказано существование и единственность решения задачи Коши для одномерной системы типа Бюргерса.

Ключевые слова: Двухскоростная гидродинамика, система типа Бюргерса, метод слабой аппроксимации.

Turdiev Ulugbek Associate Professor, Department of Mathematics,
University of Information Technologies and Management
Rakhmatova Latofat – master's student. University of Information

CAUCHY PROBLEM FOR A ONE-DIMENSIONAL SYSTEM OF BURGERS-TYPE EQUATIONS ARISING IN TWO-SPEED HYDRODYNAMICS

Annotation: The Koshi problem for a one-dimensional system of Burgers type equations arising in two-velocity hydrodynamics is considered. By the method of weak approximation, the existence and uniqueness of the solution of the Koshi problem for a one-dimensional Burgers type system is proved.

Keywords: Two-velocity hydrodynamics, Burgers type system, weak approximation method.

KIRISH

Jahon miqyosida olib borilayotgan ko‘plab ilmiy-amaliy tadqiqotlar, aksariyat hollarda, metrologiya va okeanologiya sohalarida ko‘p fazali siqiluvchan muhitlar uchun dinamik jarayonlarni modellashtirish, shuningdek, mantiya jinslaridagi konvektiv massa almashinishi, filtratsion oqimlar va turli geologik jarayonlarning matematik modellari uchun sonli-analitik usullarni yaratish masalalariga keltiriladi. Fazalararo intensiv massa almashinuvi kuzatiladigan neft va gaz konlarini ishga tushirish va ulardan foydalanish jarayonida tabiiy qatlamlardagi flyuidlar oqimini hisoblashda ko‘p fazali muhitlar modelini yechish, matematik modellashtirish va hisoblash matematikasi sohaları bo‘yicha olib borilayotgan tadqiqotlarning obyekti hisoblanadi. Shu sababli, ikki tezlikli gidrodinamikada yuzaga keladigan bir o‘lchovli Burgers tipidagi tenglamalar sistemasi uchun Koshi va chegaraviy masalalarni sonli yechish sxemalari hamda algoritmlarni qurish, dasturiy vositalar majmuini yaratish amaliy matematikaning muhim vazifalaridan biri bo‘lib qolmoqda.

Ko‘p fazali oqimlarni modellashtirish va aralash elliptik-giperbolik tipdagi tenglamalar sistemasi uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalalarni keng tadqiq etishda boshlang‘ich-chegaraviy shartlarning nokorrekt qo‘yilishi bilan bog‘liq bo‘lgan qiyinchiliklarni bartaraf etish uchun o‘zgarmas bosimli modelning turli giperbolik ko‘rinishdagi matematik modellarini tuzish va ularni sonli usullar yordamida yechishga qaratilgan ilmiy tadqiqotlar olib borilmoqda.

Ushbu yo‘nalishda, jumladan Byurgers tipidagi tenglamalar va ularning sistemasi orqali ifodalanuvchi modellar metrologiya, okeanologiya neft va gaz sohalarida keng qo‘llash bo‘yicha tadqiqotlar ustivor hisoblanmoqda. Shu bilan birga, o‘zgarmas bosimga ega bo‘lgan qo‘shsuyuqlikli muhitda nochiziqli to‘lqinlar tarqalishining matematik modelini takomillashtirish, ikki tezlikli gidrodinamikada yuzaga keladigan Byurgers tipidagi bir o‘lchovli tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasini yechish dolzarb vazifalardan hisoblanadi. [1:105], [8:153].

1. Byurgers tipidagi tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasi.

Bir o‘lchamli holatda ushbu sistema quyidagi ko‘rinishga ega

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \eta_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b \frac{\rho_2}{\rho_1} (u - v) + F, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = \eta_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + b(u - v) + F, \quad (2)$$

(1) va (2) formulalarda b -fazalararo ishqalanish koeffitsiyenti, g‘ovak muhitlar uchun Darsi koeffitsiyentining analogi hisoblanadi.

(1), (2) Byurgers tipidagi tenglamalar sistemasi uchun ta’sir etuvchi kuchlarni hisobga olmagan holda $(F(t, x) = 0)$ $\Pi_{[0, T]} = \{(t, x) : 0 \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}^1\}$ sohada quyidagi boshlang‘ich shartlarga ega Koshi masalasini ko‘rib chiqamiz.

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad v|_{t=0} = v_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^1. \quad (3)$$

Bizni (1), (2) Byurgers tipidagi tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasining $u(t, x), v(t, x) \in C^{1,2}(\Pi_{[0, T]})$ xossalarga ega bo‘lgan yechimlari qiziqtiradi - bir marta t bo‘yicha va ikki marta x bo‘yicha uzluksiz differensiallanuvchi funksialar sinfi. Kuchsiz approksimatsiya usuli bilan Byurgers tipidagi bir o‘lchovli tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasi yechimining mavjudligi va yagonaligi isbotlangan [2;39], [3:56].

2. Byurger tipidagi tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasini kuchsiz yaqinlashish usuli.

(1), (2), (3) masalaning $u_0(x)$, $v_0(x)$ Koshi masalalariga to'xtalamiz. Faraz qilaylik, $u_0(x), v_0(x) \in C^2(\mathbb{R}^1)$ va

$$\left| \frac{d^n u_0(x)}{dx^n} \right| \leq c_n, \quad \left| \frac{d^n v_0(x)}{dx^n} \right| \leq \tilde{c}_n, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad n = 0, 1, 2, \quad (4)$$

bu yerda c_n , \tilde{c}_n - biror berilgan manfiy bo'lmagan o'zgarmlar.

Avval, Koshi masalalari cheksiz differensiallanuvchi bo'lgan holini ko'rib chiqamiz. Faraz qilamizki, $u_0(x), v_0(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ va

$$\left| \frac{d^n u_0(x)}{dx^n} \right| \leq c_n, \quad \left| \frac{d^n v_0(x)}{dx^n} \right| \leq \tilde{c}_n, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (5)$$

Kuchsiz approksimatsiya usuliga ko'ra, (1), (2), (3) Koshi masalasini quyidagi masala bilan approksimatsiyalaymiz:

$$\frac{\partial u^\tau}{\partial t} = 3\eta_1 u_{xx}^\tau, \quad \frac{\partial v^\tau}{\partial t} = 3\eta_2 v_{xx}^\tau, \quad n\tau < t \leq \left(n + \frac{1}{3}\right)\tau, \quad (6)$$

$$\frac{\partial u^\tau}{\partial t} + 3u_x^\tau = 0, \quad \frac{\partial v^\tau}{\partial t} + 3v_x^\tau = 0, \quad \left(n + \frac{1}{3}\right)\tau < t \leq \left(n + \frac{2}{3}\right)\tau, \quad (7)$$

$$\frac{\partial u^\tau}{\partial t} = -3\tilde{b}(u^\tau - v^\tau), \quad \frac{\partial v^\tau}{\partial t} = 3b(u^\tau - v^\tau), \quad \left(n + \frac{2}{3}\right)\tau < t \leq (n+1)\tau, \quad (8)$$

$$u^\tau(0, x) = u_0(x), \quad v^\tau(0, x) = v_0(x), \quad (9)$$

bu yerda $\tilde{b} = \frac{\rho_2}{\rho_1} b$, $N\tau = t^*$, $N > 1$ - butun son, $n = 0, 1, \dots, N-1$, va t^* doimiy (10) tengsizlikni qanoatlantiradi (quyida keltirilgan).

Izoh 1.: (6)-(9) masala yechimini tuzishda birinchi kasr qadamlarda issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi uchun Koshi masalasi yechiladi, ikkinchi kasr qadamlarda - ko'chish tenglamasi uchun Koshi masalasi, uchinchi kasr qadamlarda esa - oddiy differensial tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasi yechiladi.

Masalaning yechimi quyidagi ko‘rinishga ega:

$$u^\tau = u_0(x) + \frac{3\tilde{b}}{\bar{b}}(v_0(x) - u_0(x))(1 - e^{-\bar{b}\tau}),$$

$$v^\tau = v_0(x)e^{-\bar{b}\tau} + \frac{3\tilde{b}}{\bar{b}}v_0(x)(1 - e^{-\bar{b}\tau}) + \frac{3\tilde{b}}{\bar{b}}u_0(x)(1 - e^{-\bar{b}\tau}),$$

bu yerda $\bar{b} = 3(b + \tilde{b})$.

(5) munosabatlar bajarilgan bo‘lsin va c_1 , \tilde{c}_1 va t^* doimiylar quyidagi shartlarni qanoatlantirsin

$$1 - c_1 t^* > 0, \quad 1 - \tilde{c}_1 t^* > 0 \quad (10)$$

U xolda $\Pi_{[0, \tau]}$ soxada u^τ va v^τ yechim mavjud va τ , x o‘zgaruvchilar bo‘yicha o‘zining barcha hosilalari bilan chegaralangan. Aniqki, ixtiyoriy fiksirlangan τ da (6)-(9) masalaning u^τ va v^τ yechimi τ kattalikka bog‘liq bo‘lmagan xolda chegaralangan.

$$|u^\tau(t, x)| \leq c_0, \quad |v^\tau(t, x)| \leq \tilde{c}_0. \quad (11)$$

Yuqorida keltirilgan muloxazalarni takrorlab, u^τ va v^τ yechimlarning x bo‘yicha ixtiyoriy tartibli xususiy hosilalari τ bo‘yicha chegaralanganligini ko‘rsatish mumkin:

$$\left| \frac{\partial^k u^\tau(t, x)}{\partial x^k} \right| \leq C_k, \quad \left| \frac{\partial^k v^\tau(t, x)}{\partial x^k} \right| \leq \tilde{C}_k, \quad (t, x) \in \Pi_{[0, \tau]}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (12)$$

bu yerda C_k , \tilde{C}_k - biror musbat o‘zgaruvchilar bo‘lib, $C_k \leq c_k$, $\tilde{C}_k \leq \tilde{c}_k$.

(11), (12) tengsizliklar va (6)-(9) tenglamalardan τ bo‘yicha tekis baholashlar kelib chiqadi:

$$\left| \frac{\partial^{k+1} u^\tau(t, x)}{\partial t \partial x^k} \right| \leq c_k, \quad \left| \frac{\partial^{k+1} v^\tau(t, x)}{\partial t \partial x^k} \right| \leq \tilde{c}_k, \quad (t, x) \in \Pi_{[0, \tau]}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (13)$$

Bu baholashlardan u^τ , v^τ va ularning x bo‘yicha ixtiyoriy tartibli hosilalari

$\Pi_{[0,\tau]}$ da tekis chegaralangan va tekis darajada uzluksiz ekanligi kelib chiqadi.

Arsela teoremasiga asosan, diagonal usuli bilan $\{u^\tau\}$, $\{v^\tau\}$ ketma-ketlikning $\Pi_{[0,\tau]}$ sohaning xar bir chegaralangan qism soxasida o'zining x bo'yicha barcha xosilalari bilan mos ravishda u va v funksiyalarga tekis yaqinlashuvchi $\{u^{\tau_k}\}$, $\{v^{\tau_k}\}$ qism ketma ketliklarini tanlab olish mumkin, buning natijada u va v funksiyalar x bo'yicha ixtiyoriy tartibli xosilaga ega bo'ladi va quyidagi munosabatlar bajariladi

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad v|_{t=0} = v_0(x), \quad (14)$$

$$\left| \frac{\partial^k u(t,x)}{\partial x^k} \right| \leq C_k, \quad \left| \frac{\partial^k v(t,x)}{\partial x^k} \right| \leq \tilde{C}_k, \quad (t,x) \in \Pi_{[0,\tau]}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (15)$$

Yechimning yagonaligi standart usul bilan isbotlanadi.

Natijada, u^τ, v^τ funksiyalar ketma-ketliklarining o'zi xam $\tau \rightarrow 0$ da o'zining barcha xosilalari bilan $\Pi_{[0,\tau]}$ da mos ravishda u va v ga tekis yaqinlashadi. $u_0(x), v_0(x) \in C^2(\mathbb{R}^1)$ bo'lgan xol o'rtacha funksiyalar yordamida isbotlanadi. Shunday qilib, quyidagi teorema isbotlangan.

Teorema 1. $u_0(x), v_0(x)$ - funksiyalar (3.3) shartni qanoatlantirsin. U holda (6)-(9) masalaning $u^\tau(t,x)$ va $v^\tau(t,x)$ yechimi $\Pi_{[0,\tau]}$ sohada $\tau \rightarrow 0$ da (1), (2), (3) masalaning $u^\tau(t,x)$ va $v^\tau(t,x)$ yechimiga tekis yaqinlashadi. $\frac{\partial^k u(t,x)}{\partial x^k}, \frac{\partial^k v(t,x)}{\partial x^k}$, $k = 0, 1, \dots$, hosilalar $\Pi_{[0,\tau]}$ sohada $u(t,x)$ va $v(t,x)$ ning tegishli hosilalariga tekis yaqinlashadi.

Burgers tipidagi sistema qo'shsuyuqlikli muhit modelining tenglamalar sistemasini soddalashtirilgan ko'rinishi bo'lib, bosim o'zgarmasligi va siqilmaslik shartining yo'qligi bilan qo'shsuyuqlikli muhit modelining tenglamalar sistemasidan farq qiladi. Shu sababli, Burgers tipidagi sistema uchun masalalar to'plami ba'zan o'zgarmas bosimga ega bo'lgan ikki tezlikli suyuqlik dinamikasi deb ataladi.

Ikki tezlikli gidrodinamikada yuzaga keladigan Burgers tipidagi tenglamalarning bir o'lovli sistema uchun Koshi masalasi ko'rib chiqildi. Kuchsiz yaqinlashish usulidan foydalanib, Burgers tipidagi bir o'lovli sistema uchun Koshi masalasi yechimining mavjudligi va yagona ekanligi isbotlangan. Riman tipidagi tenglamalar sistemasining harakatlanuvchi to'lqinlar ko'rinishidagi yechimi ko'rib chiqildi.[4:10], [5:20], [6:5], [7:153], [9:11].

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati:

[1] Турдиев У. К., Кодиров Ф. Э. Задача Коши Для Одномерной Системы Уравнений Типа Бюргера Возникающей В Двухскоростной Гидродинамике //Инновации в технологиях и образовании: сб. ст. участников XI Между. – 2018. – С. 349.

[2] Turdiyev U., Imomnazarov K. A system of equations of the two-velocity hydrodynamics without pressure //AIP Conference Proceedings. – AIP Publishing, 2021. – Т. 2365. – №. 1.

[3] Турдиев У. К. Система уравнений типа Римана, возникающая в двухжидкостной среде: Система уравнений типа Римана, возникающая в двухжидкостной среде //MODERN PROBLEMS AND PROSPECTS OF APPLIED MATHEMATICS. – 2024. – Т. 1. – №. 01.

[4] Turdiev U. K., Kh I. K. Riemann-type system of equations arising in a two-fluid medium //Abstr. Int. Conf. Inverse and Ill-Posed Problems (Oct. 2–4, 2019, Samarkand, Uzbekistan). – 2019. – С. 119-120.

[5] Turdiev U. K. Imomnazarov Kh. Kh. A system of equations of the Riemann type arising in a two-fluid medium //Int. Conf. "Inverse and ill-posed problems. – 2019. – С. 119-120.

[6] Имомназаров Х., Турдиев У. К. Исследование задачи Коши для одномерной системы уравнений типа Бюргера методом слабой аппроксимации //Проблемы информатики. – 2019. – №. 3 (44). – С. 20-30.

[7] Турдиев У. РЕШЕНИЕ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ //International Scientific and Practical Conference on Algorithms and Current Problems of Programming. – 2023. – Т. 1. – №. 01..

[8] Имомназаров Б. Х., Турдиев У. К., Имомназаров Х. Х. Задача Коши для одномерной системы типа Бюргера //Дифференциальные уравнения и математическое моделирование. – 2019. – С. 30-30.

[9] Имомназаров Б. Х., Турдиев У. К., Коробов П. В. ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ТИПА БЮРГЕРСА //Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем. – 2019. – С. 9-14.

[10] Имомназаров Х. Х., Турдиев У. К. ОБ ОДНОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОЙ СИСТЕМЫ ПОРОУПРУГОСТИ //МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА имени МИРЗО УЛУГБЕКА. – 2012. – Т. 204. – С. 48.

[11] Турдиев У. К., Имомназаров Х. Х. НЕКОТОРЫЕ ИНТЕРЕСНЫЕ КЛАССЫ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ВОЗНИКАЮЩИХ В ДВУХФАЗНОЙ СРЕДЕ //КАРШИ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ. – С. 184.

[12] Qayumova G. THE ROLE OF INFORMATION TECHNOLOGIES IN THE DEVELOPMENT OF COMPETENCES OF INDEPENDENT WORK IN THE DIGITAL ENVIRONMENT //Science and Innovation. – 2022. – Т. 1. – №. 8. – С. 505-508.

[13] Raxmonov B. STUDENTS IN INTERDISCIPLINARY COMMUNICATIONS IN THE DEVELOPMENT OF INFORMATION COMPETENCE POSSIBILITIES OF IT-TECHNOLOGIES //Science and Innovation. – 2022. – Т. 1. – №. 8. – С. 509-514.

[14] Kalandarovich, Movlonov Ma'ruf. "THE ROLE OF SCIENCE BLOCKS IN TEACHING FUTURE ENGINEERS TO SOLVE ISSUES RELATED TO MANUFACTURING PRACTICE." Academia Repository 4.11 (2023): 119-122.

[15] Movlonov, M. K. "ZAMONAVIY AXBOROT TEXNOLOGIYALARIDAN FOYDALANISH ORQALI MATEMATIK FANI ELEMENTLARINI O'RGANISH." *Экономика и социум* 11-2 (126) (2024): 308-311.