УДК 519.17

Биткина В.В.

ассистент кафедры прикладной математики

факультет математики и информационных технологий

ФГБОУ ВО «Северо-Осетинский государственный университет имени К.Л. Хетагурова»

Россия, г. Владикавказ

СИЛЬНО РЕГУЛЯРНЫЕ ГРАФЫ СО ВТОРЫМ СОБСТВЕННЫМ ЗНАЧЕНИЕМ 6 И λ=0

Аннотация:

Дж. Кулен предложил задачу изучения дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин — сильно регулярные графы со вторым собственным значением ≤ t для данного натурального числа t. Ранее задача Кулена была решена для t ≤ 5. В данной работе рассматриваются сильно регулярные графы со вторым собственным значением 6 и λ=0. Они являются окрестностями вершин дистанционно регулярных графов, удовлетворяющих задаче Кулена при t=6.

Ключевые слова: сильно регулярный граф, собственное значение, дистанционно регулярный граф.

V.V. Bitkina

assistant of Department of applied mathematics

faculty of mathematics and information technology

North Ossetian State University,

Vladikavkaz, Russia

STRONGLY REGULAR GRAPHS WITH SECOND EIGENVALUE 6 AND λ=0

Annotation:

J. Koolen proposed the problem of studying distance-regular graphs in which the neighborhoods of vertices are strongly regular graphs with second eigenvalue $\leq t$ *for a given positive integer t. Earlier Koolen's problem was solved for* $t \leq 5$*. In this paper we consider strongly regular graphs with second eigenvalue 6 and* $\lambda=0$*. They are neighborhoods of vertices of distance-regular graphs satisfying the Koolen's problem for t=6.*

Keywords: strongly regular graph, eigenvalue, distance-regular graph.

Нами рассматриваются простые неориентированные графы.

Пусть a - вершина графа Γ. Тогда через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a. Через [a] обозначим $\Gamma_1(a)$. Пусть u, w - вершины графа Γ, такие что, расстояние между ними d(u,w)=i. Тогда через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим количество вершин в множестве $\Gamma_{i+1}(u)\cap[w]$ ($\Gamma_{i-1}(u)\cap[w]$). Если все значения $b_i(u, w)$ (соответственно значения $c_i(u, w)$), где i = 0,...,d, равны между собой для любых вершин u, w, таких что d(u,w)=i, то граф Γ диаметра d называется дистанционно регулярным (сокращено дрг) с массивом пересечений $\{b_0, b_1,...,b_{d-1}; c_1,...,c_d\}$. [1]

Например:

1. Полные графы являются дистанционно-регулярными графами с диаметром 1 и степенью v−1 (с массивом пересечения {v-1,1});

2. Граф Петерсена является дистанционно-регулярным с массивом пересечений {3,2;1,1}.

Для подсчета количества вершин в дрг используется следующая формула: $v=k_0+k_1+k_2+...+k_d$, где $k_0=1$, $k_1=k$, $k_{i+1}=k_ib_i/c_{i+1}$. Давайте разберемся что из себя представляют эти k_i. Если мы выделим любую вершину графа и построим все ее i-окрестности, то k_i - число вершин в каждой такой i-ой окрестности.

Спектр графа - множество всех собственных значений матрицы смежности графа с учетом их кратности.

Сильно регулярный граф с параметрами (v,k,λ,μ) – это регулярный граф диаметра 2 с количеством вершин v, степенью k, числом общих соседей любых двух смежных вершин λ, числом общих соседей любых двух несмежных вершин μ.

Основная задача теории дистанционно регулярных графов - это классификация всех дистанционно регулярных графов. Как известно, при классификации дистанционно регулярных графов речь может идти только об описании конкретных классов дистанционно регулярных графов. В 2009 году Джеком Куленом была предложена задача изучения дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин - сильно регулярные графы со вторым собственным значением, не большим t для данного натурального числа t. Задача Кулена для t = 1 была решена А.А. Махневым и его учениками в 2010 году и независимо Дж. Куленом. Задача Кулена для t=2 была решена А.А. Махневым и его учениками в 2012 году. В 2015 и 2016 годах А.А. Махневым и Д.В. Падучих были найдены массивы пересечений дистанционно регулярных графов при $2<t\leq4$ и $t=5$ соответственно.[2-6]

В статье мы находим параметры сильно регулярных графов с $\lambda=0$ со вторым собственным значением 6. Полученные графы являются окрестностями вершин дистанционно регулярных графов, удовлетворяющих задаче Кулена при $t=6$.

Пусть Г - дистанционно регулярный граф диаметра 3, a - некоторая вершина графа Г, [a] - сильно регулярный граф с параметрами $(v,k,0,\mu)$ со вторым собственным значением 6.

Теорема. Сильно регулярные графы [a] имеют параметры: (1276,50,0,2), (1073,64,0,4), (1080,78,0,6), (1178,99,0,9), (1458,141,0,15), (2256,246,0,30), (2585,288,0,36), (2916,330,0,42), (24057,2976,0,420).

Доказательство. Для нахождения параметров графа используем пункт (i) теоремы 1.3.1 из [1]. Получаем формулу $k=36+7\mu$, для $\mu=1,2,3,\ldots$. Используя прямоугольное соотношение для сильно регулярных графов [1], получим ограничение на $\mu\leq1260$ и вычислим v. Выпишем случаи, когда все параметры являются целыми неотрицательными числами: (1850,43,0,1), (1276,50,0,2), (1122,57,0,3), (1073,64,0,4), (1066,71,0,5), (1080,78,0,6), (1106,85,0,7), (1178,99,0,9), (1220,106,0,10), (1311,120,0,12), (1408,134,0,14), (1458,141,0,15), (1612,162,0,18), (1717,176,0,20), (1770,183,0,21), (2147,232,0,28), (2256,246,0,30), (2530,281,0,35), (2585,288,0,36), (2916,330,0,42), (3082,351,0,45), (3915,456,0,60), (4082,477,0,63), (4472,526,0,70), (5253,624,0,84), (5588,666,0,90), (6426,771,0,105), (7544,911,0,125), (7600,918,0,126), (8383,1016,0,140), (10621,1296,0,180), (12300,1506,0,210), (14651,1800,0,252), (18178,2241,0,315), (24057,2976,0,420), (35816,4446,0,630), (71095,8856,0,1260).

Найдем собственные значения и их кратности полученных графов, используя пункты (i), (vi) теоремы 1.3.1. из [1]. Представим данные в виде таблицы:

Параметры графа	Второе собственное значение r	Третье собственное значение s	Кратность f собственного значения r	Кратность g собственного значения s
(1850,43,0,1)	6	-7	992,3077	856,692
(1276,50,0,2)	6	-8	725	550
(1122,57,0,3)	6	-9	668,8	452,200
(1073,64,0,4)	6	-10	666	406
(1066,71,0,5)	6	-11	684,9412	380,059
(1080,78,0,6)	6	-12	715	364
(1106,85,0,7)	6	-13	751,5789	353,421
(1178,99,0,9)	6	-15	836	341
(1220,106,0,10)	6	-16	881,7273	337,273
(1311,120,0,12)	6	-18	977,5	332,500
(1408,134,0,14)	6	-20	1077,154	329,846
(1458,141,0,15)	6	-21	1128	329
(1612,162,0,18)	6	-24	1283,4	327,600
(1717,176,0,20)	6	-26	1388,75	327,250
(1770,183,0,21)	6	-27	1441,818	327,182
(2147,232,0,28)	6	-34	1818,3	327,700
(2256,246,0,30)	6	-36	1927	328

(2530,281,0,35)	6	-41	2200,17	328,830
(2585,288,0,36)	6	-42	2255	329
(2916,330,0,42)	6	-48	2585	330
(3082,351,0,45)	6	-51	2750,526	330,474
(3915,456,0,60)	6	-66	3581,5	332,500
(4082,477,0,63)	6	-69	3748,16	332,840
(4472,526,0,70)	6	-76	4137,439	333,561
(5253,624,0,84)	6	-90	4917,25	334,750
(5588,666,0,90)	6	-96	5251,824	335,176
(6426,771,0,105)	6	-111	6088,923	336,077
(7544,911,0,125)	6	-131	7206,076	337,004
(7600,918,0,126)	6	-132	7261,957	337,043
(8383,1016,0,140)	6	-146	8044,447	337,553
(10621,1296,0,180)	6	-186	10281,38	338,625
(12300,1506,0,210)	6	-216	11959,81	339,189
(14651,1800,0,252)	6	-258	14310,23	339,773
(18178,2241,0,315)	6	-321	17836,62	340,376
(24057,2976,0,420)	6	-426	23715	341
(35816,4446,0,630)	6	-636	35473,36	341,645
(71095,8856,0,1260)	6	-1266	70751,69	342,311

Так как кратности собственных значений сильно регулярных графов являются целыми положительными числами, мы можем сделать вывод, что сильно регулярные графы без треугольников со вторым собственным значением 6 имеют параметры: (1276,50,0,2), (1073,64,0,4), (1080,78,0,6), (1178,99,0,9), (1458,141,0,15), (2256,246,0,30), (2585,288,0,36), (2916,330,0,42), (24057,2976,0,420).

Теорема доказана.

Использованные источники:

1. Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A. “Distance-regular graphs”, Berlin etc: Springer-Verlag, 1989.
2. Карданова М.Л., Махнев А.А. “О графах, в которых окрестности вершин являются графами, дополнительными к графу Зейделя” // Докл. РАН. 2010. Т. 434. № 4. С. 447–449.
3. Белоусов И.Н., Махнев А.А., Нирова М.С. “Дистанционно регулярные графы, в которых окрестности вершин сильно регулярны с собственным значением 2” // Докл. РАН. 2012. Т. 447. № 5. С. 475–478.
4. А.А.Махнев, Д.В.Падучих “О расширениях исключительных сильно регулярных графов с собственным значением 3”, Тр. ИММ УрО РАН, 20, № 1, 2014, С. 169–184.
5. А.А.Махнев “Сильно регулярные графы со вторым собственным значением 4 и их расширения”, Тр. Ин-та матем., 23:2, 2015, С. 82–87.
6. А.А.Махнев, Д.В.Падучих “Графы, в которых локальные подграфы сильно регулярны со вторым собственным значением 5”, Тр. ИММ УрО РАН, 22, №4, 2016, С. 188–200.