УДК 501

Островская А.А., студентка, 3 курс,
институт архитектуры, строительства и транспорта,
Тамбовский Государственный Технический Университет.
Корчагина О.А., к. хим. н., доцент,
кафедра конструкций зданий и сооружений,
Тамбовский Государственный Технический Университет.

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ.

Аннотация. В статье приводятся примеры уточняющие область применения теорем и определений, связанных с понятием предела функции, область применения теорем и определений, связанных с понятием непрерывности функции, область применения теорем дифференциального исчисления и определений, связанных с понятием дифференцируемости функций, основанных на функции Дирихле.

Ключевые слова. Предел функции, непрерывность функции, дифференциальное исчисление, дифференцируемость функции, функция Дирихле.

Ostrovskaya A. A., student, 3-nd year,
Institute of Architecture, Construction and Transport,
Tambov State Technical University.
Korchagina O.A.,

Ph.D. in Chemistry, assistant professor,

Department of Buildings and Structures,

Tambov State Technical University.

DIFFERENTIAL FUNCTIONS.

Annotation. The article provides examples clarifying the scope of application of theorems and definitions related to the concept of the limit of a function, the scope of application of theorems and definitions related to the concept of continuity of a function, the scope of theorems of differential calculus and definitions related to the concept of differentiability of functions based on Dirichlet function.

Keywords. Limit of function, continuity of function, differential calculus, differentiability of function, Dirichlet function.

Функция, имеющая производную только в одной точке.

Рассмотрим функцию $f(x) = x^2D(x)$. Покажем существование производной при $x = 0$. По определению

$$f'(0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(0+\Delta x)^2D(0+\Delta x)-0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x D(\Delta x)) = 0,$$

так как предел произведения бесконечно малой функции на ограниченную функцию равен нулю. В точке $x = 0$ функции $f(x) = x^2D(x)$ непрерывна. Действительно, $\lim_{x\to 0} x^2D(x) = 0$ как предел произведения бесконечно малой функции на функцию ограниченную, и $f(0) = 0$. В любой точке $x_0 \neq 0$ функция имеет разрыв, так как в любой окрестности точки существуют два числа: x_1 - рациональное и x_2- иррациональное, такие что $f(x_1) > x_0^2$, $f(x_2) = 0$. Отсюда функция $f(x) = x^2D(x)$ имеет производную только в точке $x = 0$, во всех других точках она имеет разрывы, а значит, производная в них не существует.

Заметим, что для большей общности примера вместо функции $f(x) = x^2D(x)$ можно было бы рассмотреть функцию

$f(x) = (x-a)^2 D(x-a) + bx,$

где a и b – произвольные числа. Эта функция имеет производную, которая равна b только в точке $x = a$.

Функция, имеющая производную (бесконечную) только в одной точке.

Функция $f(x) = \sqrt[3]{x}(D(x)+1)$ всюду определена, имеет разрывы во всех точках, кроме $x = 0$, в этой точке функция имеет производную, которая равна $+\infty$. При рациональных значениях x точки графика лежат на кривой $y = 2\sqrt[3]{x}$, при иррациональных значениях x - на кривой $y = \sqrt[3]{x}$. Функция непрерывна в нуле, потому что предел функции при $x \to 0$ равен нулю, то есть её значению в нуле. Действительно, $\lim_{x\to 0}(\sqrt[3]{x}\,(D(x) + 1)) = 0$, как предел произведения бесконечно малой функции на функцию ограниченную. В любой другой точке $x_0 \neq 0$ функция имеет разрыв, так как в любой окрестности точки x_0 существует два числа: x_1 - рациональное и x_2 – иррациональное, такие что $f(x_1) > 2\sqrt[3]{x_0}$, $f(x_2) < \sqrt[3]{x_0}$ при $x_0 > 0$, и $f(x_1) < 2\sqrt[3]{x_0}, f(x_2) > \sqrt[3]{x_0}$ при $x_0 < 0$. Покажем существование производной, равной $+\infty$ при $x = 0$. По определению

$$f'(0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{0+\Delta x}(D(0+\Delta x)+1)-0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x^{-\frac{2}{3}}(D(\Delta x)+1) = +\infty,$$

как предел произведения бесконечно большой функции на ограниченную положительную функцию.

Функции, одна или обе из которых нигде не имеют производной, но суперпозиция которых всюду дифференцируема.

Пусть $u = D(x)$ – функция, нигде не имеющая производной, а $y = (2u-1)^2$. Тогда сложная функция $y = (2D(x)-1)^2 \equiv 1$ имеет производную всюду.

Пусть $u = D(x)$, $y = D(x)$ – функции, нигде не имеющие производной. Тогда сложная функция $y = D(D(x)) \equiv 1$ всюду имеет производную.

Функция, имеющая дифференциал только в одной точке.

Рассмотрим функцию $y = f(x) = (x-1)^2 D(x-1) + 2x$. Она непрерывна только в точке $x = 1$. Действительно, $f(1) = 2$ и $\lim_{x\to 1}((x-1)^2 D(x-1) + 2x) = 2$. Заметим, что предел первого слагаемого равен нулю, как предел произведения бесконечно малой функции на функцию ограниченную, а предел второго слагаемого равен двум. Покажем, что функция дифференцируема в точке $x_0 = 1$ и имеет в этой точке дифференциал $dy = 2 \cdot \Delta x$. Запишем

$\Delta y = f(1+\Delta x) - f(1) = \Delta x^2 D(\Delta x) + 2(1+\Delta x) - 2 = 2\Delta x + \Delta x^2 D(\Delta x)$,

где первое слагаемое $2\Delta x$ - линейная однородная функция переменной Δx, а второе слагаемое $\Delta x^2 D(\Delta x) = 0(\Delta x)$, при $\Delta x \to 0$, так как множитель $D(\Delta x)$ ограничен. Отсюда имеем по определению дифференциала $dy = 2\Delta x$. В любой точке $x \neq 1$ функция разрывна, а значит, недифференцируема в ней.

Функция, которая имеет конечную положительную производную в точке, но не возрастает монотонно в окрестности этой точки.

Рассмотрим функцию $f(x) = x^2(D(x) - 0{,}5) + x$. Раскроем скобки, получим $f(x) = x^2 D(x) - 0{,}5x^2 + x$. Из примера 3.1 следует, что функция $f(x)$ имеет производную только в точке $x = 0$, во всех других точках она разрывна. Там же показано, что производная функции $x^2 D(x)$ в нуле равна нулю. Используя это, а также вычислив производную суммы, получим $f'(0) = 1$. Функция удовлетворяет положениям леммы к теореме Ферма. Точки графика этой функции лежат при рациональных значениях x на параболе $y = 0{,}5x^2 + x$, при иррациональных значениях x - на параболе $y = -0{,}5x^2 + x$. Очевидно, что правее точки $x = 0$, а именно на интервале $(0{,}2)$ обе параболы лежат выше оси Ox, а левее точки $x = 0$, а именно на интервале $(-2{,}0)$ - лежат ниже оси Ox. Следовательно, функция удовлетворяет лемме, а именно, при $0 < x < 2$ выполняется $f(x) > f(0) =$

0, а при $-2 < x < 0$ выполняется $f(x) < f(0) = 0$. Заметим, что в любой окрестности токи $x = 0$ функция не *является монотонно возрастающей.*

Функция, имеющая производную (равную нулю) только в точке своего наименьшего значения.

Определим функцию $f(x) = x^2(D(x) + 1)$. Точки графика этой функции лежат на параболе $y = 2x^2$, когда x – рациональное число, и на параболе $y = x^2$, когда x – иррациональное. Очевидно, что эта функция отвечает всем требованиям теоремы Ферма. Она всюду определена, имеет производную в точке $x = 0$ (и только в ней), что тривиально следует из аналогичного свойства функции из примера 3.1. В точке $x = 0$ достигается наименьшее значение функции, так как она равна нулю только нулевой точке, а в любой другой – больше нуля как произведение положительных чисел. По теореме Ферма произвожная в точке $x = 0$ должна равняться нулю. Действительно, раскрывая скобки в правой части функции, вычисляя производную этой суммы в точке $x = 0$, учитывая, что функция $x^2D(x)$ в нуле имеет нулевую производную (см. пример 3.1), получаем $f'(0) = 0$.

Функция, имеющая производную только в одной точке, которая является стационарной, но не является точкой экстремума.

Рассмотрим функцию $f(x) = x^2(D(x) - 0{,}5)$. Эта функция непрерывна только в точке $x = 0$. В этой точке она имеет производную, равную нулю. Заметим, что $f(0) = 0$, но функция в любой окрестности нуля, и слева, и справа от него, не является ни убывающей, ни возрастающей, и принимает как отрицательные (в иррациональных точках), так и положительные (в рациональных точках) значения. Очевидно, что $x = 0$ не является точкой экстремума.

Определение точки перегиба (первое). Точку М $(x_0, f(x_0))$ кривой (графика функции $f(x)$) называют точкой перегибы этой кривой, если существует такое число $\delta > 0$, что на интервале $(x_0 - \delta, x_0)$ функция выпуклая (вогнутая), а на интервале $(x_0, x_0 + \delta)$ функция вогнутая (выпуклая).

Определение точки перегиба (второе). Пусть в точке $M\big(x_0, f(x_0)\big)$ кривой (графика функции $f(x)$) существует касательная. Точка Mназывается точкой перегиба кривой, если существует такое число $\delta > 0$, что на интервале $(x_0 - \delta, x_0)$кривая лежит по одну сторону касательной (в одной полуплоскости), а на интервале $(x_0, x_0 + \delta)$ - по другую сторону касательной (в другой полуплоскости). Иными словами, кривая переходит в этой точке с одной стороны касательной на другую, т.е. кривая и касательная пересекаются.

Эти два определения не эквивалентны. Приведем различные примеры.

Кривая, имеющая точку перегиба по первому определению, но не по второму.

Рассмотрим функцию $f(x) = |e^x - 1|$, непрерывную всюду. Она дифференцируема всюду, кроме точки $x = 0$. Соответственно в точке $(0,0)$ касательная к графику функции не существует. На бесконечном интервале $(-\infty, 0)$ функция $f(x)$ вогнутая, на бесконечном интервале $(0, +\infty)$ - выпуклая. Точка $(0,0)$ является точкой перегиба графика функции по первому определению, но не является таковой по второму определению.

Кривая, имеющая точку перегиба по второму определению, но не по первому.

Функция $f(x) = x^3(D(x) + 1)$. Она всюду разрывна, кроме точки $x = 0$, где существует равная нулю производная, и, соответственно, в точке $(0,0)$существует касательная к нему (горизонтальная) (рис. 1). Все перечисленные свойства данной функции $x^2(D(x)+1)$, последовательно см. пример 6 и пример 1. Ни в одной, сколь угодно малой, левой или правой окрестности точки $x=0$ функция $f(x)$ не является ни выпуклой, ни вогнутой. Однако график функции $f(x)$ в его точке (0,0) переходит с одной стороны касательной на другую ($f(x)<0$ при $x<0$, $f(x)>0$ при $x>0$). Следовательно, в данном случае первое определение не применимо, но действует второе определение.

В процессе исследования было получено 6 примеров, уточняющих область применения теорем и определений, связанных с понятием предела функции, 5 примеров, уточняющих область применения теорем и определений, связанных с понятием непрерывности функции, и 9 примеров, уточняющих область применения теорем дифференциального исчисления и определений, связанных с понятием дифференцируемости функций, основанных на функции Дирихле.

Использованная литература.

1. Ю. Сидоров "Об одном замечательном уравнении" Квант, 1990г., №5, стр. 58-62.
2. Кудрявцев Л.Д., «Курс математического анализа», том I, Дрофа, 2003.